岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第23号（2016年）50頁～60頁

数学的理解の水準を高める指導計画の再構成と授業実践
ー算数科「図形の面積」（5年）の場合ー

山野　定寿＊

研　究　の　要　約

小山(2007)は、「ある数学的対象についての理解がある程度なされれば、それを他の数学的対象と関連づけて理解し、次いでその関係性の一般性について理解していく」と述べ、「数学的対象―対象間の関係―関係の一般性」の順に、児童が「直観的思考、反省的思考、分析的思考」を繰り返し働かせることで、数学的理解の水準が高まることを指摘している。そして、この2軸過程モデル(Two-axes Process Model)に則って、それぞれの数学的理解の対象となる内容を明確にした、の再構成を提案している。

筆者はその小山の提案に則って、学習指導要領や全国学力・学習状況調査結果、算数科教科書などを考慮し、5年生「図形の面積」の指導計画を再構成し、指導計画試案を提案する。

その指導計画試案を基に、筆者が授業実践し、授業過程モデル（山野 2016)へのマッピングによる児童の思考の様相の観察とパフォーマンス評価によって、実践の評価を行い、指導計画試案を考察した。

その結果、2軸過程モデルをもとにした指導計画の試案を作成することによって、単元を通じて、1時1時間の目的が明確になり、授業設計(Plan)がより明確で容易となることがわかった。また、授業過程モデルのマッピングを集めることで、単元を通しての児童の数学的理解水準の高まりを、確認した。

つまり、2軸過程モデルをもとにした指導計画の試案を作成することによって、マッピング式授業過程モデルは、規範的特性・記述的特性がさらに向上した、と筆者は考える。

Key-words　：　2軸過程モデル，指導計画，統合的な考え方

1　規則発見の授業過程モデルと研究の目的

学習指導要領(2008:20)第1節算数科の目標の解説は、推論力の育成が算数科で求められていることを述べている。

そこで筆者は、中原(1995:370)の構成的アプローチの「授業過程の構成モデル」を横軸に取り、小山(2010:218)が「①数学的理解はどのような水準によって深化するか。②ある水準においてどのように数学的思考が展開するか。」の研究を通して構築した「2軸過程モデル」を縦軸に1本軸化して取り、推論を位置づけた「マッピング式・規則発見の授業過程モデル試案　山野(2016)」を構築した（図1）。

このモデルは、縦軸に2軸過程モデルが用いる

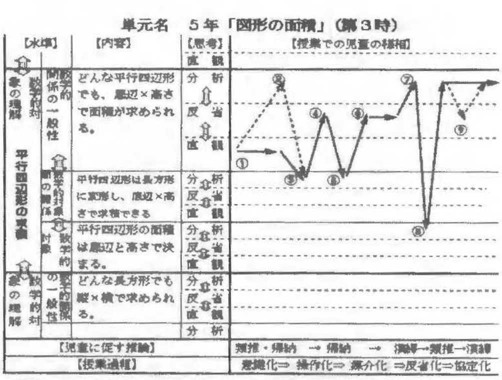


図1 ﾏｯﾋﾟﾝｸﾞ式・規則発見の授業過程モデル試案

数学的理解の水準や数学的思考の質を位置づけている。児童が直観的思考、反省的思考、分析的思考のどの数学的思考の質を働かせ、数学的理解の水準を高めるかを表すためである。すなわち縦軸は、数学的思考の質による数学的理解の水準の高まりを示している。

＊岡山県真庭市立美川小学校

横軸は1単位時間の時系列を示す授業過程に即し、規則発見のための推論を位置づけている。授業のどの過程で、推論である類推・帰納・演繹の数学的考え方を促すか、流れを示している(表1)。

表1　規則発見の授業過程モデルの流れ

①類推・帰納による前提となる規則の予想
（意識化）
②他の幾つかの具体例で規則を帰納的に検証し 発見
（操作化）
（媒介化）
③規則の合理性・妥当性等を理解し規則を合意
（反省化）（協定化）
④協定化した規則を用いて、演繹的に未解決の課題を説明する規則の活用

最後に、授業過程に位置づけた推論に促され、数学的思考の質を用いて、数学的理解の水準を高める児童の思考の様相を矢印でマッピングした。図1の①～⑨は児童の数学的思考の質が変化した局面で、実線の矢印が学級の児童の多数、点線の矢印が少数を表したものである。

そこで、本研究の目的の1つめは、(1) 筆者が構築した「規則発見の授業過程モデル」の有用性を「図形の面積」で再確認することである。

次に、筆者が構築したモデルは、1～2時間程度の授業過程モデルでしかない。小山(2007:224)は、優れた算数科授業の分析・考察を通して、「ある数学的対象についての理解がある程度なされれば、それを他の数学的対象と関連づけて理解し、次いでその関係性の一般性について理解していく」ことを見つけ、「数学的対象一対象間の関係一関係の一般性」を繰り返すことで、理解が深化することを述べている。そして、この数学的理解の階層的水準に従って、「1単元の授業内容の水準が深化するよう、単元の再構成を図る必要がある」と主張するように、「単元の数学的理解の階層水準を明らかにすること」(小山 2007:370)は、筆者も極めて重要と考える。

そこで、本研究の2つめの目的は、(2) 5年生「図形の面積」の単元全体の数学的理解の階層水準となる対象の明確化と具体化である。

(2) で構想した指導計画を、(1) の「規則発見の授業過程モデル試案」の有用性を確認するためのルーブリックで、評価することによって、指導計画の有効性を確認することにした。

2　数学的理解の水準をもとにした単元「図形の面積」5年の指導計画の構想

小山(2007:370)は、「算数科授業構成の3つの方法」として、「①理解の階層的水準の明確化　②学習内容に対する児童の理解の程度の実態把握　③理解の学習段階の具体化」をあげる。①は指導する内容について、数学的対象の理解、数学的対象間の関係の理解、数学的関係の一般性の理解の3つの理解水準を明確にする必要があることを述べている、と考える。③は、さらにそれぞれの理解水準は、どんな学習内容を対象として行うのか、内容を明確に具体化することである、と考える。

そこで、小山の数学的理解の水準に従って、1単元の授業内容の水準が深化するよう、単元の再構成を図ることにし、5年生の「図形の面積」の単元の再構成を試みる。

（1）学習指導要領

現行学習指導要領(2008: 149-151)では、「(1) 図形の面積を計算によって求めることができるようにする。ア　三角形、平行四辺形、ひし形及び台形の面積の求め方を考えること。』さらに、算数的活動として「イ　三角形、平行四辺形、ひし形及び台形の面積の求め方を、具体物を用いたり、言葉、数、式、図を用いたりして考え、説明する活動」と例示がなされる。これはひし形や台形の求積が求められた昭和 33 年の学習指導要領の内容に戻ったと考えられる。

しかし、昭和33年の学習指導要領に「基本的な図形について、その面積が計算で求められることを理解させ、面積を測定する能力をいっそう伸ばす。　ア　三角形、平行四辺形、ひし形、台形などの面積の求め方。イ　多角形の面積を三角形などに分けて求めること。」示されるとおり、内容が「台形など」や「多角形」も対象となっている。これは、現行の学習指導要領が指導すべき最低限の内容を示すためであり、実際に、平成26年度6

社の検定教科書（2014）では、多角形や一般四角形、たこ形の求積問題が出されている。

したがって、指導計画の再構成に当たって、多

表２　「面積を求める時の高さ」調査問題の結果（調査数 21 人）

	解答例	人数　（割合）
1	イ　オ(正答)	１６　（76％）
2	イ　ウ　オ	2　（10％）
3	イ	2　（10％）
4	ア　エ	1　（４％）
0	無回答	0　（０％）

角形や一般四角形、たこ形も指導計画に位置づけることにする。

さらに、理解や技能が強調された昭和 33 年と比べ、現行の学習指導要領は活動を通した、考え方を重視している。

中島(2015:27)は求積公式の指導を「文化財としての教育的意味」と位置づけ、「求積公式というもののもつ意味をよく理解させること、次々に創造を積み重ねていく体験をさせることに、その主要なねらいがある」と述べ、意味の理解と創造を積み重ねる体験活動を重視した。具体的には、等積変形と倍積変形が主ものであると考えられる。平行四辺形や三角形の紙を、切ったり折ったり、２つ集めたり､平行線の性質を使ったりしながら、既知の図形に等積・倍積変形する活動である。

したがって、指導計画の再構成に当たって、３つの数学的思考の質を大切に、直観的に体験的活動を行い、それを反省的に振り返り、なぜそれで良いのか分析的に考えさせることで、理解水準を高める学習活動を重視したい。

（２）全国学力・学習状況調査

全国学力・学習状況調査結果（国立教育研究所

図２ H19全国学力・学習状況調査問題B

2007 2008）の分析から分かることがある。

H19 年 B 問題（国立教育研究所 2007）（図２）では、「底辺×斜辺」で面積を求める児童が 34。4%いることをもとに、辻(2012)は、高さの意味を理解しているかどうかの調査を行った。その結果、「高さ」の斜辺と混同、長方形の「たて」と「高さ」対応の不十分さ、「底辺」と「高さ」の垂直関係の理解の不十分さを指摘している。

「高さ」の斜辺との混同を解決するため、伊藤(2015)はクリティカルシンキングを育成する目的で、誤答（底辺×斜辺）を評価する場面に、反例（底辺×高さ）を提示し、「両者の合理性を考え直す機会」(2015:p43)を与えることを提案する。

しかし、「底辺と高さ」の垂直関係の理解の不十分さについては未解決である。

平成 19 年Ａ５(1)と平成 20 年度算数Ａ５（図

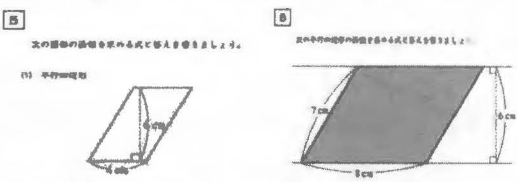
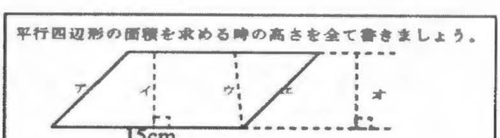


図３ H19。H20全国学力・学習状況調査A

３）は、どちらも平行四辺形の求積の問題である。平成 19 年（左）の正答率が 96。0%に対して、平成 20 年（右）の正答率は 85。3%であった。この正答率の差は「高さの斜辺と混同」だけでない。

児童が 6cm を高さとして捉えにくかったのは、平成 20 年の問題の高さ 6cm が、平行四辺形の外に示されることも１つの原因であると考える。

筆者が､2012 年６年児童(21 人)に行ったレディネス調査の中の平行四辺形の面積を求める時の高



さ（図４）を尋ねた結果を見る（表２）。

標本数は少ないが、平行四辺形の内側にある縦の直線を高さと捉える傾向が、少数ではあるが、児童にあることが分かる。この結果は、辻(2012：

図４「面積を求める時の高さ」レディネス調査

2-10)を追認するものである。

高さが、平行四辺形の外に示される場合、4年生の「平行な2つの直線の幅は、どこでも等しい」ことの理解が前提となる。面積は「量と測定」、平行は「図形」の領域であるが、その2つを結びつけて、平行線間の図形の高さが保存されるといった、図形そのものに対する理解を深めることが、大切であると考える。

そこで、指導計画の再構成に当たって、面積と図形の性質について、融合を図りながら、関係の一般的理解を深める時間を位置づけたい。

また、「平行な2つの直線の幅は、どこでも等しい」を用いて、「高さ」が変わらないことの理解を深めることは、見た目の形(写真1)で面積や公式が変わらないことにつながる、と考える。どんなに形が変わっても同じ求積の公式が使えるという理解は、公式を構成する底辺と高さの「関

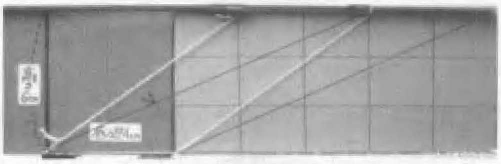


写真1 「高さが等しい」教具

係の一般性の理解」(小山 2007 :)に他ならない。

そこで、学習指導要領で例示された「三角形、平行四辺形、台形」については、底辺の延長線上に高さがある図形を、教具を用いながら取り上げ、どんなに形が変わっても同じ求積の公式が使えるという関係の一般性の理解を、繰り返し指導計画に位置づけ、高さの理解を徹底したい。

(3) 2軸過程モデルの数学的理解の水準

小山(2007)は、数学的理解は「数学的対象—対象間の関係—関係の一般性」の順で水準が高まることを述べている。

この観点で、平成 26 年度6社の検定教科書(2014)を概観する。多くの教科書は工夫を凝らし、それぞれの図形の求積公式を、算数的活動を通して導く。しかし、底辺の延長線上に高がある平行四辺形や三角形、台形については扱いに違いがある。どんなに形が変わっても同じ求積の公式が使えるという理解である「関係の一般性の理解」までをそれぞれの図形で行なわず、後で他の図形とまとめて行っているものもある。

筆者は、小山の主張に則って、指導計画を再構成したい、と考える。

また、ほとんどの教科書は、平行四辺形、三角形等の求積公式を導いた後は適用問題をしたり、三角形を用いて、台形やひし形、一般四角形や多角形の求積を行ったりしている。片桐(2001:166)が、発展的な扱いとして「ひし形、台形、多角形は、何れも対角線で三角形に分け、これらの面積を求めればよい。」と述べるところである。

一般四角形や多角形の求積は一般図形を対象とするので、小山(2007)の言う「関係の一般性の理解」の理解である。一般図形の求積は、平行四辺形、三角形、台形、ひし形の求積公式を対象として行うので、「数学的対象の理解」と考える。

ここに、この単元の二重の構造が見られる。どんなに形が変わっても同じ求積の公式が使えるという関係の一般性に至った公式は、次にこの公式自体を対象にして、一般的図形の求積や一般的な図形の性質の理解に向かうということである。

ここで指導計画の再構成に当たって、課題が提示される。小山(2007)の言う「数学的対象(それぞれの図形の公式)の理解」や「数学的関係の一般性(多角形の求積)の理解」はあるが、「数学的対象間の関係の理解」がそれらの間に見当たらないのである。ある公式を導出するために既習の公式を使うというのではなく、既習事項となった公式同士の相互関係を吟味する内容である。

髙橋(2014 : 6-7)は、台形の求積公式を基に平行四辺形(上底＝下底の時)や三角形(上底＝0の時)の公式を求めることを、「思考過程を通して見出される算数の美しさの一例」と紹介している。

この他、G 教科書(2014:194 197 198)K 教科書(2014:191)では、ひし形の求積公式を求めるために平行線上に頂点を動かし(図5)、等積変形する活動が最後に練習問題である程度である。

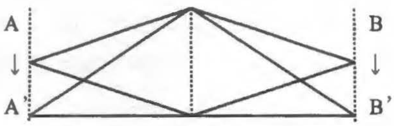


図5 「ひし形→三角形」頂点移動で変形

そこで、指導計画の再構成に当たって、「数学的対象間の理解」として、平行線間の頂点移動による等積変形を通して、公式同士の相互関係を吟味する学習内容を位置づけるものとする。

指導計画再構成の留意点を整理する。

表3 カリキュラムの再構成に当たっての5つの留意事項

① 多角形や一般四角形、たこ形もカリキュラムに位置づけること
② 3つの数学的思考の質を大切に、直観的に体験的活動を行い、それを反省的に振り返り、なぜそれで良いのか分析的に考えさせることで、理解水準を高める学習活動を重視すること
③ 面積と図形の性質について、2つの融合を図りながら、関係の一般的理解を深める時間を位置づけること
④ 三角形、平行四辺形、台形については、底辺の延長線上に高さがある図形を、教具を用いながら取り上げ、どんなに形が変わっても同じ求積の公式が使えるという理解を、繰り返しカリキュラムに位置づけること
⑤「数学的対象間の理解」として、平行線間の頂点移動による変形を通して、公式同士の相互関係を吟味する学習内容を位置づけること

3 「図形の面積」(5年)の指導計画試案

「指導計画の再構成に当たっての5つの留意事項（表3）」に則って、2軸過程モデルの数学的理解の水準を明確にした試案を試みる。

「図形の面積」の指導計画試案は、4年生の一般化された長方形の面積から始めた。平行四辺形の面積は、周り長さの等しい長方形との面積比較を通して、底辺と高さによって平行四辺形の面積が決まること（対象の理解　第1時）から始まる。長方形への等積変形を用いて、一旦公式を導く（数学的対象間の関係の理解　第2時）。そして、留意事項④（表3）に則って、どんなに形が変わっても同じ求積の公式が使えることを理解（数学的関係の一般性の理解 第3時）させる。

後で紹介する事例1では、児童に学習させる対象は、図6の写真 AB で、底辺の延長上に高さがある図形である。理解させる内容は、どんな平行四辺形でも「底辺×高さ」で面積が求められることである。平行四辺形の求積公式の構成という観点で考えると数学的関係の一般性の水準である。

しかし、「四角形の面積」の単元では、平行四辺形（第1時～第3時）、三角形（第4時～第5時）、台形（第6時～第7時）、ひし形（第9時）で学んだそれぞれの求積公式は、一般四角形や多角形を求めるための「数学的法則」(小山 2007:166)であるから、数学的対象の理解として捉えられる。

そして、留意事項⑤（表3）に則って、それぞれの求積公式間の関係を理解することが、数学的対象間の関係である。本指導計画試案では、第8時と第10時である。第8時は、台形の求積公式をもとに平行四辺形と三角形、台形の求積公式の関係の理解を深める。その関係を太い実線で表した。第10時は、ひし形の求積公式をもとに、三角形やたこ型、ひし形、の求積公式との数学的関係の理解を深める。その関係を細い実線で表した。

最後に数学的関係の一般性の理解を図る。関係の一般性を考える時、留意事項③（表3）に則って、四角形の面積の学習を通して、新たな四角形の性質に気づかせる一般性の理解が考えられる（第11時）。また、三角形・四角形の求積方法の和や差をもとに多角形の面積を求める一般性の理解も考えられる（第12時）。それぞれの関係を2種の実線で表した。

4 指導計画の再構成に関わる授業の実際

この項では、指導計画の再構成（図6）をもとに実践した授業を例に、モデルと指導計画の有効性について述べる。なおこの授業は、2014年11月12日4校時と同年11月21日5校時24日3校時20分間に岡山県真庭市立美川小学校5年生児童(n＝20)と筆者が行った「図形の面積」の授業で、全13時間の第3時と第11時である。

授業記録の児童のプロトコルは、レコーダーで記録し、それを起こしたものである。

(1) 事例1「平行四辺形の面積の公式」数学的対象の理解(数学的関係の一般性の理解)第3時

①平行四辺形の公式を一般化する目的

児童は底辺上に高さがない平行四辺形に出会う（図6写真 AB）と、それまで均衡状態だった多くの児童に混乱が起こる。これは高さがどこかという混乱だけでなく、平行四辺形の面積を求める公式が、傾いた平行四辺形にも使えるのかという混乱である。底辺と高さを同じにした平行四辺形が斜めに傾けば傾くほど細くなり、児童には、面積が小さく見える。そのような児童には、「底辺×高さ」の公式は数学的関係の一般性の理解水準（図6）でなく、平行四辺形の傾きが変われば変わる、

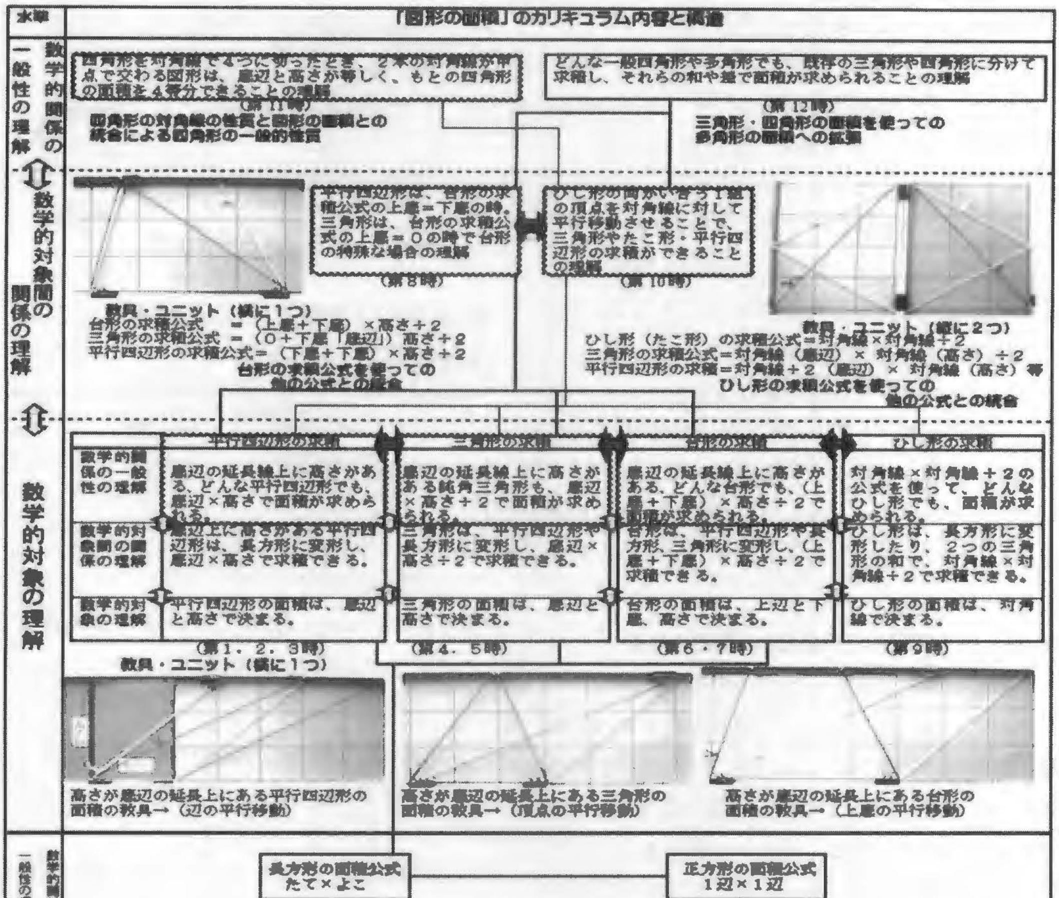


図6 「図形の面積」（5年）の指導計画試案　　（波線で囲んだ部分が再構成に関わる）

まだ一般化されていない公式である。どんな傾きの平行四辺形でも使える数学的関係の一般性の理解水準の公式に至っていない、と考えられる。

笹田(2012)は、公式を作り上げる過程に「①特定の場合の理解②変数の考えによる一般化③公式の表現④適用範囲の拡張」の４段階があり、各段階の理解が重要であるとを述べる。本時の内容は、その「④適用範囲の拡張」に当たると考えられる。

本時では、留意事項⑤（表３）に則って、方眼を描いた板に平行に貼ったカーテンレール（２重に貼る）と、ゴム紐を用いた教具（図６の中の写真）を中心に授業を構想した。

高さが底辺延長上にある平行四辺形 A・B（図６）を既習の長方形に等積変形する活動を行い、平行四辺形 A・B もこれまでと同じ長方形に変わり、「底辺×高さ」で求積できることを理解させ、高さが変わらないことを理解させる授業である。

②授業の流れと実際

ア、これまでの活動を思い出し類推的に学習課題を設定し予想する。

授業では、まず、既習の平行四辺形の面積の公式や等積変形の活動を思い出させ、次に底辺上に高さがある場合で１番傾いた状態まで、ゴム紐を動かせた時の面積の求め方を思い出させる。既習として、平行四辺形は長方形に等積変形させた、等積変形するには長方形と重ねはみ出る部分を切って移動させたことをおさえておく。

Ｔ　どんな平行四辺形を調べてみてみようか？

Ｃ　もっと傾いた平行四辺形について調べたい。

Ｔ　この平行四辺形の何を調べたいかな？

Ｃ　面積がどれ位、変わったか調べたい。

Ｃ　えっ！変わらないと思います。（略）

話し合い、「平行四辺形を傾けた時の面積の求め方を見つけよう。」を本時の学習課題とした。

Ｃ　少し傾けても面積は同じでしたね。だから、かなり傾けても同じだと思います。

多くの児童は、類推的に面積は同じと考えるが、実際に見ると面積が変わる、と混乱したのである。

イ、操作化し調べ規則を帰納する

工作用紙の高さが底辺の延長上にある平行四辺形 A・B（縮図）と長方形を配り、作業的活動を通して、面積が等しいことを帰納させる。

児童は既習の方法を類推し、平行四辺形と長方形とを重ね、出た部分を切り取り、面積が等しいことを確かめた。

ウ、妥当性を演繹的に反省化し、協定化する

帰納的活動を反省化しやすくするため、これまでの活動で用いた長方形、平行四辺形を並べて児童に観察させ、高さがどれも等しいことに気づかせる。どんな平行四辺形でも「底辺×高さ」で求積できることに気づかせ、公式を一般化する。

Ｔ　どれも面積が等しかったね。どうしてこれらの平行四辺形は面積が等しいの？（中略）

Ｃ　私は底辺と高さが同じだからだと思います。底辺と高さは垂直です。だから、頂点から底辺に垂直に線を引くとどれも同じ長さでした。

演繹的に説明する児童に注目させた。

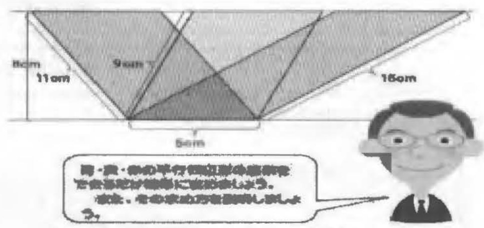
Ｃ　平行四辺形の面積は「底辺×高さ」で求められましたね。この平行四辺形も底辺も高さも同じだから面積は同じです。

Ｔ　では、こんな傾いた平行四辺形も面積はどういう式で求められるの？

Ｃｎ「底辺×高さ」です。（公式の協定化）

エ、規則を用い、いろいろな傾きの平行四辺形の面積を演繹的に説明する

規則を用いて、平行線間の底辺が同じで傾きの違う平行四辺形の面積を求める。また、なぜその式を表現したか説明させるパフォーマンス課題（資料１）とルーブリック（表４）を設定した。



資料１　パフォーマンス課題

表４演繹的説明課題のルーブリック結果（n＝20）

基準	観点	%
基準３	１つの式で面積を求められる。高さ底辺が同じことの理由を説明できる	85
基準２	２つ以上の式で面積を求められる。高さ・底辺が同じことについて説明に不十分な点がある。	15
基準１	間違いや求められない面積がある。高さ・底辺が同じことについて説明がほとんど出来ない。高さに間違いがある。	0
基準０	高さや面積が求められない。高さ・底辺が同じことについて説明がない。	0

児童が基準３に達すれば、本時のねらいを達成したと考えた。本時では、基準２の児童が３名いたが、すぐに３つも式がいらないことに気づいた。

このように、児童はどんな平行四辺形でも使える公式「底辺×高さ」を基にして、底辺と高さ（平行線間の幅は等しい）という観点で分析的に３つの図形を読み取った。そして、どの平行四辺形も面積が等しいことを、公式を用い言葉で説明した。

(2) 事例２　「４等分の秘密」(第11時) 数学的関係の一般性の理解

①「４等分の秘密」の授業をする目的

留意事項③（表３）に則って、「量と測定」と「図形」の領域とを関連づけ、面積という新たな視点で、四角形の性質について認識を深めること

にする。つまり、２本の対角線が中点で交わる四角形は､対角線で面積が４等分される性質である。

本時は、対角線の性質と面積との融合で、数学的関係の一般性の理解である。

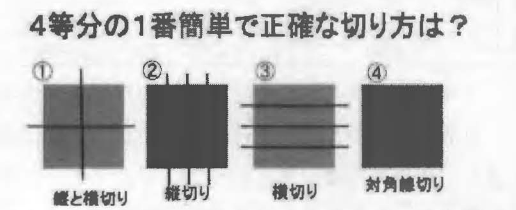
②授業の流れと実際

ア、四角形を対角線で切る良さを理解し、類推的に学習課題を設定し予想する。

スライドで「今日のおやつはカステラ、４人で等しく分けよう」を見せ、正方形（資料２）とひし形の分け方を４通り提示した。そして、対角線で切るのが簡単で正確なこと、４つの三角形は合同で面積が等しく、４等分であることを確認した。

T　正方形、ひし形は対角線で切ると面積を４等分できましたが、どんなことを調べよう？

C　他の四角形も対角線で４つに等しく分けられるかを調べたい。



資料２　正方形の４等分の仕方

めあてを「いろんな四角形も対角線で切ると４等分できるか調べよう」にまとめた。

イ、長方形と台形を操作化し規則を帰納する

T　長方形は向かい合う三角形は合同で面積が等しいけど、隣り合う三角形は合同でない。だから、長方形は対角線で４等分できないのかな？

資料３　長方形のヒント

型紙で切った図を重ね発問し、スライド（資３）を提示し、ヒントにした。

C　三角形ＡとＢは底辺と高さが等しいから面積が等しいです。

児童は６時の数学的対象の理解に戻った。

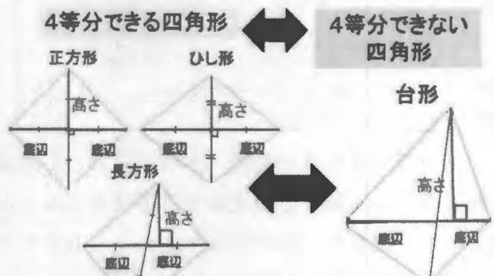
T　なぜ、長方形は底辺が等しいの？

C　対角線が真ん中で交わるからです。

次に台形を取り上げた。台形は４つの三角形全て合同でなく、４等分できない。

T　どうして台形は４等分できないの？

C　高さは同じだけど、底辺が違う。



資料４　４等分できる・できない四角形

これまでの学習を徐々に示し（資料４）、帰納的に規則を予想させ、仮説を作る。

T　正方形・ひし形・長方形は４等分できたけど、対角線に規則はないかな？

帰納的に考えることを促した。

C　全部対角線が中心で交わっています。

ウ、妥当性を演繹的に反省化し、協定化する

たこ形は、対角線が１つ中心で交わっていることを確認し、面積を４等分できるか考えさせる。

C　横の２つの三角形は合同で等しい。でも縦の２つは等しくない。高さは同じだけど、底辺の長さが違うから４等分できない。

C　だから２本の対角線が両方真ん中で交わらないと４等分できないと思います。

T　２本が中心で交わると、何が等しいの？

Cn　底辺です。

対角線が中点で交われば、底辺が等しくなり面積が４等分できることを協定化した。

エ、規則を用い、対角線は平行四辺形の面積を４等分できるかを演繹的に説明する

見つけた規則を用い、対角線が平行四辺形の面積を４等分できるかを説明させるパフォーマンス課題を出し、ルーブリック（表５）で評価する。

表 5 平行四辺形は対角線で切ると面積を4等分できる理由のルーブリック

(n=20)

基準	観点	%
基準4	・「できる」と正しく判断でき、平行四辺形の対角線で4つに切った時の三角形の2組が合同なこと、合同でない三角形は対角線の交わり方の特徴(中点で交わる)を根拠に底辺の長さが等しいことと、高さが等しいことを根拠として4つの三角形の面積が等しいことの説明がかけた。	30
基準3	・「できる」と正しく判断でき、対角線で切った時の4つの三角形の2組が合同なこと、合同でない三角形は高さは同じこと、底辺の長さが等しいことのどちもかけ、4つの三角形の面積の等しいことの説明がかけた。	50
基準2	・「できる」と正しく判断できたが、対角線で切った4つの三角形の2組が合同なこと、合同でない三角形は高さ、または、底辺の長さが等しいことのどちらかの説明がかけなかった。(説明記述の一部欠落)	10
	・「できない」と判断したが、対角線で切った4つの三角形の2組が合同なこと、合同でない三角形は高さと底辺の長さが等しいことの説明を書いた。	0
基準1	・「できる」と正しく判断できたが理由はほとんど書けない。	10
基準0	「できない」と判断し、理由がほとんどかけない。	0

児童が基準3に達すれば、本時のねらいを達成したと考えた。計4名の児童が目標達成には至らなかった。授業後、個別指導で4名中3名はすぐ理解し説明できたが、1名は説明できなかった。後日、第6時どんな三角形も底辺と高さが等しければ面積が等しいことを復習し理解に至った。

5　授業過程モデル実践と指導計画試案の省察

(1) 授業過程モデルのマッピングによる、児童の思考の様相の観察と考察

授業事例の展開過程に応じ、児童の数学的思考の質と数学的理解の水準の変化を、授業過程モデルにマッピングして、考察を加える(図1と図7)。

事例1(図1)では、傾いた平行四辺形の面積を類推的に考え、面積が変わると考える児童①と変わらないと考える児童②の対立からはじまった。工作用紙の傾いた平行四辺形を長方形に等積変形する活動③⑤を通して、その活動を反省化④⑥し、帰納的に面積が変わらないことを確かめた。最後に、演繹的に公式を分析⑦し、面積は底辺と高さで決まる⑧ので、底辺と高さが等しい平行四辺形は、面積が等しいことを説明した。しかし、パフォーマンス課題の解決で、反省的思考の活動に戻る児童⑨もいたが、求積途中で底辺と高さが等しいことに気づいた。

事例2(図7)では、「4等分の秘密」を探るため、まず対角線で正方形①を切った場合面積が等しいかどうか考えた。児童は三角形を重ね、合同であることを確かめ、4等分できることを反省的に理解した。同様にひし形②についても類推し理解した。しかし、長方形③については向かい合う三角形は合同であることを確かめたが隣り合う三角形は合同でないことに反省的に気づき④形の違う三角形の面積が等しいかどうか考えた。三角形同士を回したり重ねたりする活動を通して、底辺×高さ÷2の公式や第6時の授業を思い出し⑤、底辺と高さが等しいことから面積が等しいことを反省的に理解⑥した。台形は見て明らかに違うと判断する児童(点線の矢印)も数名いたが、多くの児童は長方形の時と同様な活動⑦を行い、面積が違うこと⑧を理解した。そして帰納的に正方形・ひし形・長方形から、「対角線が中点で交わる四角形は面積が等しいこと」(仮説⑨)を発見し、対角線が1本中点で交わるたこ形⑩について考えた。その結果2本の対角線が中点で交わらなければ、底辺の長さが変わることに気づき、仮説の修正⑪を行い、いったん協定化した。そして、規則を演繹的に使い、平行四辺形⑫の場合4等分できるかどうか説明し。最後に規則と平行四辺形の場合とが一致するかを確認⑬した。

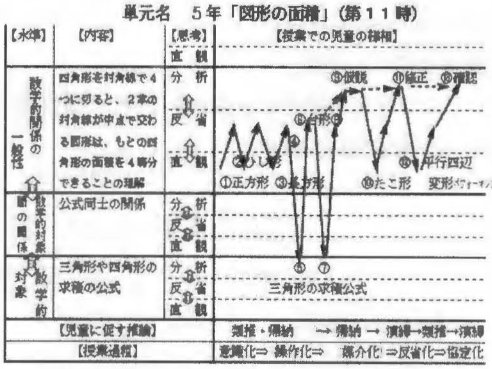


図7　マッピング式規則発見の授業過程モデル

以上のことから、類推・帰納・演繹の推論を授業過程に適切に位置づけて児童に算数的活動を促せば、児童は直観的思考・反省的思考・分析的思考を往還しながら思考活動が促され、その結果、数学的関係の一般性を理解し、児童の数学的理解の水準が上昇することが分かった。

これは山野(2016)を追認する結果であった。

(2)指導計画試案に基づく実践の成果と課題

児童に規則を発見させるマッピング式授業過程モデルの有用さは、2点指摘した（山野 2016）。

1点目は、児童の数学的理解の水準を高めるために、推論という方法を「授業過程の構成モデル」に位置づけたことであった。今回も、2つの事例で示した通り、1単位時間の授業設計(Plan)の際、児童に促す推論と思考の質、目的が授業過程とともに明確になり、授業者が見通しを持ち、児童の数学的理解の水準を高められるようになった。

さらに、今回、2軸過程モデルをもとにした指導計画の試案を作成することによって、単元を通じての見通しがより明確に持てるようになった。そのことで、単元を見通して、授業設計(Plan)がより容易となった、と言える。

2点目は、児童の理解の水準や思考の過程をマッピングにより、可視化できるようになったことであった。児童がどの思考の質を用い、直観的に規則を見つけ、反省的に確かめ、分析的に規則の根拠を説明し、その規則を用いることができるようになったかを、数学的理解の水準（縦軸）と授業過程（横軸）で捉えられ、評価(Check)できる。

さらに今回、数学的理解の水準をもとにした指導計画の試案を作成することで、単元を通しての児童の数学的理解水準の高まりを、マッピングを集め、確認できるようになった。

また、本論文の授業過程モデルの試案（図1・図7）は実線と点線の2本線であるが、単元を通して、個別の指導を要する一人の児童の思考の過程を折れ線で追い評価(Check)し、実態を把握する記述性の応用が可能になったと、筆者は考える。

つまり、2軸過程モデルをもとにした指導計画の試案を作成することによって、マッピング式授業過程モデルは、規範的特性・記述的特性がさらに向上した、と筆者は考える。

今後の課題は、指導計画を4年生から6年生までの面積に広げること、個別の指導を要する一人の児童の変容を捉えていくことである。

引用及び参考文献

小学校学習指導要領解説算数科(2008) 文部科学省東洋館出版 p.20 pp149-151

小学校学習指導要領 学習指導要領データベース 国立教育研究所 www. Nier. go. jp/guideline/

中原忠男(1995)『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文社 p.370 p.371

小山正孝(2010)『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』聖文新社 p.133p.218p.233 p.370p.480

小山正孝ら『小学算数5年下』日本文教出版 2014 p.p.5-24

山野定寿(2016)「推論を活かした規則発見の授業過程モデルの研究」日本教育実践学会学会誌『教育実践学研究』2015

国立教育研究所(2007)『平成19年度 全国学力・学習状況調査 調査問題 小学校算数A・B』

国立教育研究所(2008)『平成20年度 全国学力・学習状況調査 調査問題 小学校算数A』

清水静海・船越俊介ら(2014)『わくわく算数5』啓林館 pp.117-133

坪田耕三・金本良通ら(2014)『小学算数5』教育出版 pp.182-201

藤井斉亮ら(2014)『新しい算数5下』東京書籍 pp.32-52

一松信・岡田褘雄(2014)『みんなと学ぶ小学校算数5年』学校図書 p.p.178-200

赤攝也・橋本吉彦(2014)『新版たのしい算数5』大日本図書 p.p.170-186

中島健三(2015)『算数・数学教育と数学的な考え方』東洋館出版 p.27

辻宏子(2012)「平行四辺形の求積問題の解決に見る子どもの「高さ」の理解」日本数学教育学会『算数教育』第90巻 第4号 pp.2-10

伊藤孝希(2015)「算数教育におけるクリティカルシンキングの育成に関する基礎的研究」全国数学教育学会『数学教育研究』第21巻第2号 pp.39-48

片桐重男(2001)『算数科の指導内容の体系』
東洋館出版　pp.166-168
高橋昭彦(2014)「論説１ 算数の美しさとは」
『新しい算数研究』東洋館出版 pp.6-7
笹田昭三(2012)「「教材の本質に迫る」求積公式を生み出す過程―その過程に潜む数学的な考え方―。」『リーディングス新しい算数研究』」
東洋館出版 pp.100-102

（平成２８年９月３０日受理）